数理解析研究所講究録
597巻 1986年 69-73

Orbifolds と 微分方程式

九州大学理学部 吉田正章
Masaaki YOSHIDA

先ず例の観察から始めよう。 X を複素射影直線 $\mathbb{CP}_1$ とする。 その上の一点 x で $b \in \{2, 3, \cdots, \infty\}$ 位の分岐をする X の cover はあるだろうか。 あるはずがない。 なぜなら $X - \{x\}$ は単連結であるからである。 では X 上の二点 x_1, x_2 で各々 b_1, b_2 位の分岐をする X の cover はあるだろうか。 今から後、b とか b_j とか書くといつもそれは $2, 3, \cdots, \infty$ なる数を表わすとする。 さて, x_1 の回りを廻る道はずるずるっと変型すると x_2 を廻る道になるから b_1 と b_2 が異れば, その様な cover はない。 $b_1 = b_2 = b$ ならばその様な cover はある。 もし b が有限なら cover は $\mathbb{CP}_1 \ni z \longmapsto x = z^b \in \mathbb{CP}_1$ で与えられ, もし $b = \infty$ なら $\mathbb{C} \ni z \longmapsto x = e^z \in \mathbb{CP}_1 - \{0, \infty\}$ で与えられる。 ここで一般性を失うことなく $x_1 = 0$, $x_2 = \infty$ とした。 ところで, 多様体 X と分岐点と分岐指数を合

せたものを X上の orbifold という。与えられた分岐を実現する cover が存在すれば，その orbifold は uniformizable と言い，cover を a uniformization という。A uniformization から orbifold への自然な写像を射影と言い，その多価逆写像を developing map と言う。上の例では，$b<\infty$ なら developing map は $z=x^{1/b}$ であり，$b=\infty$ なら $z=\log x$ である。さて次に X 上の三点 x_1, x_2, x_3 で各々 b_1, b_2, b_3 位の分岐をする cover はあるかを問題にしよう。この場合はいつでも存在する。しかもたくさん存在する。その中で一番大きな cover がありそれを the universal uniformization という。これは単連結な uniformization として特徴付けられる。以後 uniformization としては universal なもののみを取扱う。さてこの三点分岐のとき，developing map は何であろうか。答は古典的によく知られている。今一般性を失うことなく $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=\infty$ として，developing map φ はある超幾何微分方程式と呼ばれる X 上の $\{0,1,\infty\}$ を確定特異点にもつ線型二階の常微分方程式の線型独立な解二つの比として表わされる。このように orbifold X 上の線型微分方程式で解が developing map φ を与えるものを uniformizing DE (differential equation) という。次に X 上の $k\ (\geq 4)$

ケの点 $x_1, \cdots, x_k$ で各々 $b_1, \cdots, b_k$ 位の分岐をするcoverであるが，これもいつも存在する。 しかし developing map を与える DE は知られてない。 というよりも，unif. DE が一意に存在することは分っているのだが，どうしても決め方が分らない係数があるのである。 この係数のことを人はアクセサリパラメータと呼び，それを決定する問題をPoincaréの問題という。 この問題が近日中に解ける見込みは無い。今までの観察をふりかえると，$k=1$ はだめ，$k=2$ は自明，$k=3$ は超幾何 そして $k \geqq 4$ は困難ということになる。即ちorbifoldsのdeveloping maps として，超幾何函数という特殊函数が，自明な場合と困難な場合の間に出て来たと考えられる。 この考えを，$X = \mathbb{CP}_2$ として適用してみよう。 面白い函数や微分方程式が見つかるかもしれない。$\mathbb{CP}_1$ 上の点に対応して，今度は X 上の曲線で分岐するcoverを考えることになる。 $\mathbb{CP}_1$ の場合と同様に だめな場合，自明な場合 があり，最初に出合う面白い場合は，以下の様な六本の直線である。 $xyz(x-y)(y-z)(z-x)=0$ この六本に $b_1, \cdots, b_6$ なる数を与えて，cover は存在するだろうか。 加藤十吉氏の三年程前の定理によれば，それはいつも存在する。 ではその univ. uniformization M は何であろうか。 単連結リーマン面は三種類しかなく分っているが，

單連結二次元多様体について我々は何も知らない。ただ対称空間 $\mathbb{P}^2$, $\mathbb{C}^2$, B_2（2次元超球）と $H\times H$（上半平面二つの直積）だけは分っている，と言ってよいだろう。さて，$b_1,\cdots,b_6$ を適当に取ると univ. unif. M が上に揚げた対称空間になることがある。有名なのは M が B_2 になる場合で 27 通りの b_j の取り方があり，それらは，Picard－寺田－Mostow－Deligne（PTMD）－orbifolds と言われる。これらの unif. DE はこれも古くから知られている Appell の超幾何微分方程式（F_1）と言われるものになっている。ところで，一変数の場合と同じように，この場合（上記の六本の直線）以外は，すべて accessory par. の困難に出会うのだろうか。大方の予想に反して，実はそうではないのだ。一変数の場合の最大の難所 acc. par. は二変数以上の場合は本質的に消え去るのだ。それは リー群 SL(2,$\mathbb{R}$) の離散分部群のみに rigidity が成り立たないと言う理由による。変数をふやすと，多くのものは複雑になってゆくが，このようにやさしくなることもあるという訳である。では，別の面白い orbifolds を見つけて，unif. DE を計算してみよう。univ. unif M が B_2 になる場合はここ二,三年で数ケ見つかった。Hirzebruch と彼の学生 T. Höfer, B. Hunt による結果は，以下の通り。

分岐図型名 ： Icosahedral, Klein, Hesse, extended Hesse, Valentiner, F_4. いずれも同名の unitary reflection group の鏡映面から定義さる. 数ケ月前に見つかった F_4 をのぞいては, unif. DE が分っている。 図型に群が働いているので, 群不変な型で簡単な式で書ける。 これらは, 古典的に知られた DE ではないようである。 univ. unif M が $H \times H$ になる場合も面白いのであるが, ここでは省略.

文献

T. Sasaki, M. Yoshida : 二変数階数四の微分方程式 (仮題) 準備中.

M. Yoshida : Orbifold-uniformizing DE III. Math. Ann. 印刷中.

M. Yoshida : Fuchsian DE. (仮題) Lec. Note, Vieweg Verlag 準備中.